Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Matemáticas
Nivel medio
Prueba 1

Jueves 10 de noviembre de 2016 (tarde)

1 hora 30 minutos

Número de convocatoria del alumno

Instrucciones para los alumnos

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba no se permite el uso de ninguna calculadora.
- Sección A: conteste todas las preguntas en las casillas provistas.
- Sección B: conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Escriba su número de convocatoria en la parte delantera del cuadernillo de respuestas, y adjúntelo a este cuestionario de examen y a su portada utilizando los cordeles provistos.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de matemáticas NM** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[90 puntos]**.

11 páginas

8816 – 7309

No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

Sección A

Conteste **todas** las preguntas en las casillas provistas. De ser necesario, se puede continuar desarrollando la respuesta en el espacio que queda debajo de las líneas.

1. [Puntuación máxima: 6]

Sea $f(x) = x^2 - 4x + 5$.

(a) Halle la ecuación del eje de simetría del gráfico de f. [2]

La función también se puede expresar en la forma $f(x) = (x - h)^2 + k$.

(b) (i) Escriba el valor de h.

(ii) Halle el valor de k. [4]

2. [Puntuación máxima: 5]

Sea $\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$, donde θ es agudo.

(a) Halle $\cos\theta$. [3]

(b) Halle $\cos 2\theta$. [2]

3. [Puntuación máxima: 7]

En la siguiente tabla se muestran los valores que aparecen en la cuarta fila del triángulo de Pascal.

1	4	6	4	1

(a) Escriba los valores que aparecen en la quinta fila del triángulo de Pascal. [2]

(b) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo, halle el término en x^3 del desarrollo de $(2x+3)^5$. [5]

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

4. [Puntuación máxima: 7]

Los vectores de posición de los puntos P y Q son $\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ y $7\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$ respectivamente.

(a) Halle una ecuación vectorial de la recta que pasa por P y por Q. [4]

(b) La recta que pasa por P y por Q es perpendicular al vector $2\boldsymbol{i}+n\boldsymbol{k}$. Halle el valor de n. [3]

5. [Puntuación máxima: 6]

Los sucesos A y B son independientes, siendo $\mathrm{P}(A \cap B) = 0{,}2$ y $\mathrm{P}(A' \cap B) = 0{,}6$.

(a) Halle $\mathrm{P}(B)$. [2]

(b) Halle $\mathrm{P}(A \cup B)$. [4]

6. [Puntuación máxima: 7]

Sea $f'(x) = \operatorname{sen}^3(2x)\cos(2x)$. Halle $f(x)$, sabiendo que $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$.

7. [Puntuación máxima: 7]

Sea $f(x) = m - \frac{1}{x}$, para $x \neq 0$. La recta $y = x - m$ corta al gráfico de f en dos puntos distintos. Halle los posibles valores de m.

No escriba soluciones en esta página.

Sección B

Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Empiece una página nueva para cada respuesta.

8. [Puntuación máxima: 16]

Sean $\vec{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ y $\vec{\mathrm{OB}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(a) (i) Halle $\vec{\mathrm{AB}}$.

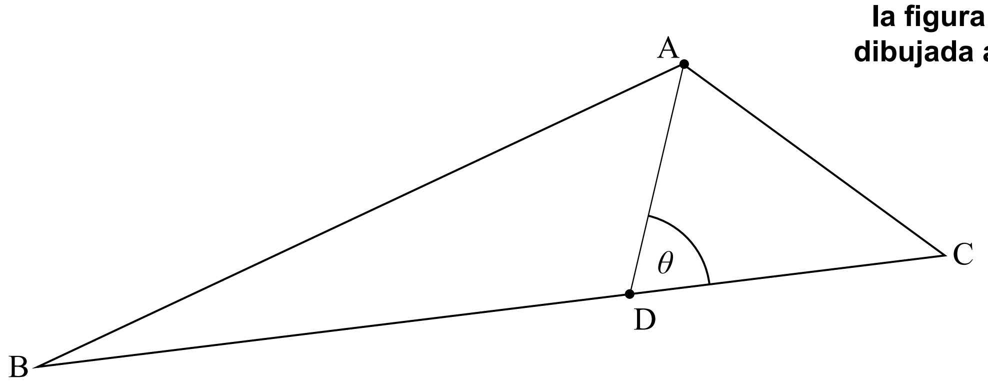
(ii) Halle $\left|\vec{\mathrm{AB}}\right|$. [4]

El punto C es tal que $\vec{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(b) Muestre que las coordenadas de C son $(-2, 1, 3)$. [1]

La siguiente figura muestra el triángulo ABC. Sea D un punto perteneciente a $[\mathrm{BC}]$, siendo el ángulo agudo $\mathrm{ADC} = \theta$.

la figura no está dibujada a escala



(c) Escriba una expresión en función de θ para

(i) el ángulo ADB;

(ii) el área del triángulo ABD. [2]

(d) Sabiendo que $\frac{\text{área } \Delta\mathrm{ABD}}{\text{área } \Delta\mathrm{ACD}} = 3$, muestre que $\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{BC}} = \frac{3}{4}$. [5]

(e) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo, halle las coordenadas del punto D. [4]

No escriba soluciones en esta página.

9. [Puntuación máxima: 13]

Los dos primeros términos de una progresión geométrica infinita son (en orden)

$$2\log_2 x,\ \log_2 x, \text{ donde } x > 0.$$

(a) Halle r. [2]

(b) Muestre que la suma de los infinitos términos de la progresión es $4\log_2 x$. [2]

Los tres primeros términos de una progresión aritmética son (en orden)

$$\log_2 x,\ \log_2\left(\frac{x}{2}\right),\ \log_2\left(\frac{x}{4}\right), \text{ donde } x > 0.$$

(c) Halle d. Exprese la respuesta como un número entero. [4]

Sea S_{12} la suma de los 12 primeros términos de la progresión aritmética.

(d) Muestre que $S_{12} = 12\log_2 x - 66$. [2]

(e) Sabiendo que S_{12} es igual a la mitad de la suma de los infinitos términos de la progresión geométrica, halle x. Exprese la respuesta de la forma 2^p, donde $p \in \mathbb{Q}$. [3]

No escriba soluciones en esta página.

10. [Puntuación máxima: 16]

Sea $f(x) = \cos x$.

(a) (i) Halle las cuatro primeras derivadas de $f(x)$.

(ii) Halle $f^{(19)}(x)$. [4]

Sea $g(x) = x^k$, donde $k \in \mathbb{Z}^+$.

(b) (i) Halle las tres primeras derivadas de $g(x)$.

(ii) Sabiendo que $g^{(19)}(x) = \frac{k!}{(k-p)!}\left(x^{k-19}\right)$, halle p. [5]

Sean $k = 21$ y $h(x) = \left(f^{(19)}(x) \times g^{(19)}(x)\right)$.

(c) (i) Halle $h'(x)$.

(ii) A partir de lo anterior, muestre que $h'(\pi) = \frac{-21!}{2}\pi^2$. [7]

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.